Μαθημα 9ο 26/3/2018

Κλασσικη

Ευρεση Δυναμικου

Αν γνωριζουμε τη συναρτηση f: $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ τοτε κατα προφανη τροπο βρισκουμε την $\vec{F} = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$

Η ερωτηση που απανταμε

Γνωριζοντας το πεδιο $\vec{F}$ μπορω να βρω την f?

Θεωρημα

Για ενα διανυσματικο πεδιο $\vec{F} = M\hat{i} + N\hat{j} + P\hat{k}$ υπαρχει f διαφοριсιμη τ.ω $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ αν και μονο αν

$M dx + N dy + P dz = df$ τελειο διαφορικο ή ακριβης μορφη

Παρατηρηση

Ειναι ισοδυναμο να δειξουμε οτι

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial z}, \quad \frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial M}{\partial y}$$

το επομενο του y το επομενο του x

αν μια απο αυτες δεν ισχυει τοτε δεν ισχυει το διαφορικο

> Μεταβλητη και θεση οχι στην ίδια παραγωγο!

Αποδειξη Θεωρηματος

Αν υπαρχει το f τοτε
$$\left.\begin{aligned} df &= M dx + N dy + P dz \\ &= \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left\{\begin{aligned} M &= \partial f/\partial x \\ N &= \partial f/\partial y \\ P &= \partial f/\partial z \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} \frac{\partial M}{\partial y} &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial x} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \end{aligned}\right.$$

ομοια θα βγαλεις και αν παρω τις αλλες σχεσει

Εξαιτίας της συνέχειας έχω

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

Άρα

$$\boxed{\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}}$$

→ Θεώρημα Stokes

Για να δείξουμε το αντίστροφο χρειαζόμαστε το εξής θεώρημα:

$$\oint_C \vec{F}\, d\vec{r} = \iint_S \vec{\nabla} \times \vec{F}\ \hat{n}\, ds$$ με $\hat{n}$: μοναδιαίο κάθετο στην επιφάνεια S

και επιπλέον $\vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = \vec{0}$

Παρατήρηση

Για να υπολογίσουμε αυτή τη συνάρτηση f αρκεί να λύσουμε το σύστημα εξισώσεων

$M = \partial f / \partial x$

$N = \partial f / \partial y$

$P = \partial f / \partial z$

παράδειγμα 1:

Έστω $\vec{F} = (e^x \cos y + yz)\hat{i} + (xz - e^x \sin y)\hat{j} + (xy + z)\hat{k}$

Να βρεθεί αν υπάρχει συνάρτηση f διαφορίσιμη τ.ω

$f: \vec{F} = \vec{\nabla} f$

απάντηση

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \Rightarrow -e^x \sin y + z = z - e^x \sin y$$

$$\frac{\partial M}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial x} \Rightarrow y = y$$

και αντίστοιχα και η 3η σχέση ισχύει

Τωρα θα πρεπει να τη βρουμε
Θα λυσουμε το συστημα

$$\begin{cases} u = \partial f / \partial x \\ v = \partial f / \partial y \\ p = \partial f / \partial z \end{cases}$$

1) καθε εξισωση την λυνω ως προς τη μεταβλητη που ολοκληρωνεται
2) Ελεγχος αν αυτο που βρηκα ικανοποιει και τις 3 σχεσεις

Λυνω την πρωτη

Δεν θα ειναι σταθερα αλλα συναρτηση των αλλων δυο

$$e^x \cos y + yz = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f = \int (e^x \cos y + yz)\,dx + g(y,z)$$

Αν το επαιρνα ως σταθερα θα εχανα την συνεπεια

$$\Rightarrow f = e^x \cos y + xyz + g(y,z)$$

Αρα $f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + g(y,z)$

Θα πρεπει και ελεγξω την συνεπεια
Αντικαθιστω στις αλλες δυο (βημα 2ο)

- $v = \dfrac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow \cancel{xz} - \cancel{e^x \sin y} = -e^x \sin y + xz + \dfrac{\partial g}{\partial y}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial g}{\partial y} = 0$ αυτο σημαινει οτι η g ειναι συναρτηση μονο του z

$\Rightarrow \boxed{g = g(z)}$ μου λεει ως προς μια μεταβλητη θα ειναι η g

- $p = \dfrac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow xy + z = xy + \dfrac{dg}{dz} \Rightarrow \dfrac{dg}{dz} = z \Rightarrow g' = z \Rightarrow$

αρα αφου η g ειναι συναρτηση του z μονο

$g = \dfrac{z^2}{2} + C$ αν το επερνα σταθερα ολη θα εχανα τη συνεπεια

Τελικα η f ειναι της εξης μορφης
$$f = f(x,y,z) = e^x \cos y + xyz + \frac{z^2}{2} + C$$

▶ Αν είχαμε τώρα αλλαγή στη τρίτη μεταβλητή
$\vec{F} = (e^x \cos y + yz)\hat{i} + (xz - e^x \sin y)\hat{j} + (xy^2 + z)\hat{k}$

Κάνω την ίδια δουλειά για τις δύο πρώτες σχέσεις
$3^{η}$ σχέση → όχι πάντα σταθερό
$P = \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow xy^2 + z = xy + g' \Rightarrow xy^2 - xy = g' - z$

• Είναι άτοπο διότι στο αριστερό μέλος έχω συνάρτηση των x, y και στο δεξιό μέλος συνάρτηση του z
• για να έχω ίσες συναρτήσεις θα πρέπει και στα δύο μέλη να έχω σταθερές

→ θα βρίσκω το f με μια απροσδιοριστία C

Παράδειγμα 2
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα
$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,1)} (y\,dx + x\,dy + 4\,dz)$$
(x, y, z)
απάντηση
Έχω ένα επικαμπύλιο ολοκλήρωμα όμως δεν ξέρω την καμπύλη
Όταν δε μου δίνει τη καμπύλη σημαίνει ότι δε με νοιάζει ποια η διαδρομή που θα ακολουθήσω
Θα πρέπει να μπορώ να γράψω την f ως εξής $f: \vec{F} = \vec{\nabla} f$

1. Επιβεβαιώνω ότι το $\vec{F}$ είναι συντηρητικό και ισχύουν οι τρεις σχέσεις
2. Βρίσκω $\vec{F} = \vec{\nabla} f$

Scanned by CamScanner

$$M = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow y = \frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow f = xy + g(y,z)$$

$$N = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow x = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow x = x + \frac{\partial g}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y} = 0 \Rightarrow g = g(z)$$

$$P = \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow 4 = \frac{\partial f}{\partial z} \Rightarrow 4 = g' \Rightarrow g(z) = 4z + C$$

οποτε εχω $f = xy + 4z + C$

και το ολοκληρωμα θα γινει ως εξης

$$\int_{(1,1,1)}^{(2,3,1)} (y\,dx + x\,dy + 4\,dz) \overset{\text{θεμ. θεωρ}}{=} f(2,3,1) - f(1,1,1) =$$

$$= 6 + 4 - C - (1 + 4 + C) = 10 - 5 = 5$$

μπορω να επιλεξω μια καμπυλη για να δω αν αυτο το επικαμπυλιο $= 5$

παραδειγμα 3

Να δειξετε οτι $\vec{F} = (2x-3)\hat{i} - z\hat{j} + \cos z\,\hat{k}$ δεν ειναι συντηρητικο. (2ς ΑΣΚΗΣΗ)

► Θεωρηματα Διατηρησης

Με ενδιαφερει να απαντησω αν κατα τη διαρκεια της κινησης υπαρχουν απωλειες.

Μια αμεση ερωτηση προκυπτει απο τα συντηρητικα πεδια

οτι ειναι $W = \int_A^B \vec{F}\,d\vec{r} = f(B) - f(A)$ ειναι η $f(A) = f(B)$ ή

ισοδυναμα $W = 0$

Η ενεργεια που ξοδευαμε για να μετακινησαμε ενα υλικο σημειο μικρης μαζας ειναι μηδεν

▶ Διατηρηση Ορμης

Αν σ' ενα υλικο σημειο δεν επιδρουν δυναμεις η ορμη του διατηρειται

Αποδειξη

Απο το Νομο του Νευτωνα γνωριζουμε

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} \Rightarrow \vec{p} = \vec{c} \text{ (διατηρειται)}$$

▶ Διατηρηση Στροφορμης

Οριζουμε ως στροφορμή το διανυσμα

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v})$$

οπου $\vec{r}$ το διανυσμα θεσης και $\vec{p}$ η ορμή του υλικου σημειου

▶ Φυσική σημασια

Χαρακτηριζει περιστρεφομενα σωματα και συνηθως καλειται και γωνιακη ορμή.

Χαρακτηριζει την αδρανεια ως προς τη κινηση γυρω απο εναν αξονα. Η διευθυνση του διανυσματος της στροφορμης συμπιπτει με τον αξονα περιστροφης του σωματος

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \dot{\vec{r}} \times \vec{p} + \vec{r} \times \dot{\vec{p}} = \vec{v} \times (m \cdot \vec{v}) + \vec{r} \times \vec{F} = 0 + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{N} \text{ (ροπή)}$$

Αρα η στροφορμη διατηρειται οταν το συνολο των ροπων $\vec{N} = \vec{r} \times \vec{F}$ ειναι μηδεν

Scanned by CamScanner

▸ Διατήρηση Ενέργειας

Γνωρίζουμε ότι: $W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = \int_A^B \vec{F}\, \vec{v}\, dt = \int_A^B m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v}\, dt =$

$= \int_A^B m \vec{v}\, d\vec{v}$

όπου • $d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{dt} \cdot dt = \vec{v}\, dt$

• $d\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot dt$

συνιστώσα στο x, y και z

Γενικά $\vec{v} = v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}$

$d\vec{v} = dv_1 \hat{i} + dv_2 \hat{j} + dv_3 \hat{k}$

άρα το εσωτερικό γινόμενο

$\vec{v} \cdot d\vec{v} = v_1 dv_1 + v_2 dv_2 + v_3 dv_3$

άρα

$$W = \int_A^B m \vec{v}\, d\vec{v} = \int_A^B m \left(v_1 dv_1 + v_2 dv_2 + v_3 dv_3\right) =$$

$$= \frac{1}{2} m \left(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2\right) \Big|_A^B = \frac{1}{2} m |\vec{v}|^2 \Big|_A^B =$$

$$= \frac{1}{2} m |\vec{v}(B)|^2 - \frac{1}{2} m |\vec{v}(A)|^2 = T(B) - T(A)$$

όπου $T = \frac{1}{2} m v^2$ (κινητική ενέργεια)

• Μια ποσότητα που έχει είπαμε έργο την βγάλαμε να είναι η μεταβολή της ενέργειας.

• Τα αξιώματα της μηχανικής απαιτούν η κινητική ενέργεια να είναι τόσο $\frac{1}{2} m v^2$

▶ Ορίζαμε ένα νέο μέγεθος την κινητική ενέργεια

$$T = \frac{1}{2} m v^2$$

και ζητάμε τη σύνδεση της ενέργειας με συντηρητικά πεδία, δηλαδή με πεδία για τα οποία ισχύει $\vec{F} = \vec{\nabla} f$ τότε

αν $W = \int_A^B \vec{F}\, d\vec{r} = f(B) - f(A) = T(B) - T(A)$ $\Rightarrow$

$T(A) - f(A) = T(B) - f(B)$

Τέλος ορίζω ως $V = -f$ την δυναμική ενέργεια ώστε $T(A) + V(A) = T(B) + f(B)$ είναι σταθερό (το επιβάλλει η συνέπεια)

• Η ενέργεια διατηρείται στα συντηρητικά πεδία

▶ Η συνολική ενέργεια ενός συντηρητικού πεδίου διατηρείται, δηλαδή

$\vec{\nabla} \times \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow E_{ολ} =$ Διατηρείται

Παράδειγμα

Το $\vec{F}$ θα έχει συνιστώσα μόνο το z

$\vec{F} = -mg\hat{k}$

Το πεδίο είναι συντηρητικό; Είναι γιατί g σταθερό και αν $P = -m$ τότε $dH = 0$

$\vec{F} = -\vec{\nabla} V$ τότε θέλω $-\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} = -mg\hat{k} \Rightarrow$

$$\begin{cases} \partial V/\partial x = 0 \Rightarrow V = V(y,z) \\ \partial V/\partial y = 0 \Rightarrow V = V(z) \\ \partial V/\partial z = 0 \Rightarrow \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial V}{\partial z} = mg \Rightarrow V = mgz + C \end{cases}$$

σε χρόνο $t=0$: $z = z_0$ τότε ορίζω $V(z_0) = 0$ και τελικά

$V = mg(z - z_0)$

Τότε από την αρχή διατήρησης ενέργειας (Α.Δ.Ε) σε κάθε σημείο z αν θεωρήσουμε ότι το σώμα ξεκινά με μηδενική ταχύτητα τότε

$V(z) = T(z) \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow h = (z - z_0)$ διανυθέν ύψος

Σε κάθε περίπτωση η ενέργεια διατηρείται